

Matematyka

Poziom rozszerzony

1. W pudełku jest 5 kul białych i n kul czarnych. Z tego pudełka będziemy jednocześnie losować 2 kule. Oblicz, ile powinno być kul czarnych, by prawdopodobieństwo wylosowania kul różnokolorowych było nie mniejsze niż $\frac{5}{9}$.

? 5 pkt

2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których układ równań
$$\begin{cases} x + (m - 2)y = 1 \\ x - y = -2 \end{cases}$$
 ma rozwiązanie $(a; b)$ spełniające warunek $a \cdot b > 0$.

? 5 pkt

3. Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 + mx - 3$. Wykaż, że wielomian W nie ma innych pierwiastków.

? 4 pkt

4. Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{3} - 1$. Uzasadnij, że funkcja f ma dwa dodatnie miejsca zerowe.

? 4 pkt

5. Sprawdź, czy równość $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$ jest tożsamością.

? 4 pkt

6. W równoległoboku przekątne mają długości równe 2 cm i 6 cm, a kąt między nimi ma miarę równą 60° . Oblicz długości boków tego równoległoboku.

? 4 pkt

7. Dany jest okrąg o równaniu $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$. Wykaż, że styczne do tego okręgu poprowadzone przez początek układu współrzędnych są prostopadłe.

? 5 pkt

8. W graniastostupie prawidłowym trójkątnym poprowadzono płaszczyznę π wyznaczoną przez wysokość dolnej podstawy i ten z wierzchołków górnej podstawy, że płaszczyzna π z płaszczyzną podstawy graniastostupa tworzy kąt o mierze $\alpha \neq 90^\circ$. Pole przekroju graniastostupa wyznaczonego przez płaszczyznę π jest równe S . Oblicz objętość graniastostupa.

? 5 pkt

9. Przekrój stożka wyznaczony przez wierzchołek i cięciwę podstawy jest trójkątem równobocznym, o polu równym $36\sqrt{3}$. Płaszczyzna π , do której należy ten przekrój, tworzy z płaszczyzną podstawy stożka kąt o mierze równej 60° . Oblicz objętość stożka.

? 5 pkt

10. Rozwiąż równanie $\sin^2 x + \cos x = 1$.

? 3 pkt

11. Funkcje f i g są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe dziedziny i dla tych samych argumentów przyjmują równe wartości. Zbadaj, czy funkcje $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)}$ oraz $g(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-3}$ są sobie równe. Uzasadnij swoją odpowiedź.

? 3 pkt

12. Wielomian W zmiennej x z parametrem m jest dany wzorem $W(x) = x^3 + mx - 2m$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których wielomian W jest podzielny przez dwumian $x - m$.

? 3 pkt

13. Ciąg geometryczny (a_n) nie jest ciągiem monotonicznym. Drugi wyraz tego ciągu jest równy -80 , a wyraz czwarty jest od niego o 60 większy. Oblicz, ile początkowych wyrazów ciągu (a_n) należy dodać, aby suma tych wyrazów była równa $106\frac{7}{8}$.

? 6 pkt

14. W równoległoboku $ABCD$ długość boku AB wynosi 8 , długość boku BC jest równa 5 , a miara kąta ostrego ma wartość 60° . Oblicz długości przekątnych danego równoległoboku.

? 3 pkt

15. Rzucono 3 monetami. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyrzucono dokładnie 2 orły lub co najmniej 1 reszkę.

? 7 pkt

16. Rozwiąż równanie: $|3x + 6| - |x - 5| = 5$.

? 7 pkt

17. Na trójkącie ostrokątnym ABC o bokach długości $|AB| = 10\sqrt{3}$ i $|BC| = 5\sqrt{5}$ opisano okrąg o środku w punkcie O i promieniu 10 . Oblicz cosinus kąta ABC .

? 4 pkt

18. Dany jest punkt $P = (1; 4)$. Środek okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 8x = 0$ i punkt P należą do prostej l , która przecina okrąg w punktach A i B . Oblicz pole trójkąta ABO , gdzie O oznacza początek układu współrzędnych.

? 4 pkt

19. Wykaż, że zbiór A jest dwuelementowy, jeśli $A = \{x: x^2 \geq 9 \wedge |x| \leq 3\}$.

? 3 pkt

20. Sprawdź, czy dziedzina funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{\sqrt{9 - x^2}}$ zawiera się w dziedzinie funkcji

? 11 pkt

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{9 - x^2}}$$

21. W okrąg o równaniu $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$ wpisano kwadrat $ABCD$. Jedna z przekątnych tego kwadratu zawiera się w prostej l o równaniu $x - 3y + 4 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków kwadratu $ABCD$ i oblicz pole tego kwadratu.

? 6 pkt

22. Trójkąt o bokach długości równej 9 i 12 oraz kącie między tymi bokami o mierze 120° obraca się dookoła najdłuższego boku. Oblicz pole przekroju osiowego i objętość powstałej bryły.

? 5 pkt

23. Liczby $4, x, 9$ tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby $4, y, 9$ tworzą rosnący ciąg geometryczny. Jakim procentem liczby x jest liczba y ? Wynik podaj z dokładnością do $0,01\%$.

? 5 pkt

24. Funkcja $y = (m + 1)x^2 - (2m + 4)x - 7$ jest rosnąca w zbiorze $(-\infty; 4)$ i malejąca w zbiorze $(4; +\infty)$. Wyznacz parametr m .

? 5 pkt

25. Dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - m^2x^2 + 3mx + 7$ przez wielomian $(x + 1)$ wynosi 6 ?

? 3 pkt

26. Dla jakich wartości parametru m prosta o równaniu $y = -x + m$ i hiperbola o równaniu $y = \frac{1 + 2x}{x}$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

? 5 pkt

27. Między liczby (-6) i 50 wstaw 2 takie liczby, aby 3 pierwsze tworzyły ciąg arytmetyczny, a 3 ostatnie – geometryczny.

? 5 pkt

- 28.** Rozwiązaniem nierówności $-4x^2 - bx + c \geq 0$ jest zbiór $\langle -5; 1 \rangle$. Wyznacz parametry b, c . ? 3 pkt
- 29.** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x + 2)$ wynosi (-4) , a reszta z dzielenia tego wielomianu przez $(x - 3)$ wynosi 5. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez $x^2 - x - 6$. ? 5 pkt
- 30.** Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin x + |\sin x|$. Sprawdź, czy najmniejsza i największa wartość funkcji $f(x) = \sin x + |\sin x|$ w zbiorze liczb rzeczywistych jest równa odpowiednio największej i najmniejszej wartości funkcji $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ w przedziale $\langle 0; 6 \rangle$. ? 8 pkt
- 31.** Dane są dwa wierzchołki trójkąta $A = (-3; 5)$, $B = (4; -1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C , wiedząc, że leży on na prostej $y = 3x + 2$ i pole trójkąta jest równe $P = 12$. ? 7 pkt
- 32.** Dane są zbiory $A = \{x: x = 2^n \wedge n \in \mathbb{N}^+ \wedge n \leq 5\}$, $B = \{x: x = 4n \wedge n < 7 \wedge n \in \mathbb{N}\}$. Wymień elementy tych zbiorów. Wyznacz $A \setminus B$. ? 3 pkt
- 33.** Kąt dwuścienny między ścianami ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę 120° , a przekątna podstawy ma długość 20. Oblicz objętość ostrosłupa. ? 8 pkt
- 34.** Sprawdź tożsamość $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$. ? 6 pkt
- 35.** Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ
$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{x-3} \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$
 ? 4 pkt
- 36.** Trzy kolejne boki czworokąta opisanego na okręgu tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie 10 i sumie 70. Wyznacz długości boków tego czworokąta. ? 6 pkt
- 37.** Wykaż, że jeśli długości kolejnych boków czworokąta opisanego na okręgu tworzą ciąg arytmetyczny, to ten czworokąt jest rombem. ? 3 pkt
- 38.** Rzucono 2 kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że na obu kostkach wyrzucono tę samą liczbę oczek lub że suma wyrzuconych oczek jest równa 8. ? 7 pkt
- 39.** Dla jakich wartości parametru α liczby $1, \sqrt{2} \cos \alpha, 1 - 2 \cos^2 \alpha$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego? Dla najmniejszej dodatniej wartości α wyznacz sumę początkowych 6 wyrazów i wynik przedstaw w najprostszej postaci. ? 9 pkt
- 40.** Rozwiąż równanie $\cos x + \sin 2x = 0$. ? 3 pkt