Zadania z matematyki

Zadanie I

Wyznacz wszystkie wartości parametru *b,* dla których równanie

$$\frac{x^2-(4b+3)x+3b^2+3b}{x-2}=0$$

ma:
a) jedno rozwiązanie,
b) dwa różne rozwiązania ujemne.

Zadanie 2

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których prosta o równaniu $y = x - 3$ dzieli trójkąt *ABC* o wierzchołkach $A = (1, 1)$, $B = (2,3)$, $C = (m, 1)$ na dwie figury o równych polach.

Zadanie 3

Przekątne czworokąta wypukłego *ABCD* przecinają się w punkcie *E*. Wiadomo, że trójkąty *ABE* i *CDE* mają równe pola, długość boku *AB* jest równa 4, a przekątna *AC* jest zawarta w dwusiecznej kąta *A*. Oblicz długość boku *BC*.

Zadanie 4

Miary kątów trójkąta prostokątnego o obwodzie równym $3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Oblicz:

a) długości boków tego trójkąta,
b) objętość bryły, która powstanie z obrotu tego trójkąta dookoła jego przeciwprostokątnej.

Zadanie 5

W zbiorze 15 monet 12 jest prawidłowych, a trzy mają po obu stronach orły. Losowo wybraną monetą rzucono 10 razy i otrzymano 10 razy orła. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrano monetę z orłami po obu stronach.

Zadanie 5*

Ze zbioru liczb $\{1,2,...,2n,2n+1\},(n\geq 1)$, losujemy jednocześnie dwie liczby. Niech A_n oznacza zdarzenie – iloczyn wylosowanych liczb będzie liczbą parzystą.

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

Rozwiązania zadań z matematyki

Zadanie 1

a) Równanie wymierne ma jedno rozwiązanie, gdy równanie

$$x^2-(4b+3)x+3b^2+3b=0$$

ma jedno rozwiązanie różne od 2. spełnione są warunki zadania

$$\text{tzn: 1.)}\quad \Delta=0 \ \wedge\ -\frac{b}{2a}\neq 2$$

$$\text{lub: 2.)}\quad x_1=2\ \wedge\ x_2\neq 2$$

1.

$$\Delta=(2b+3)^2$$

$$(2b+3)^2=0$$

$$b=-\frac{3}{2}$$

Dla tej wartości parametru *b* rozwiązaniem jest liczba, a zatem spełniony jest warunek zadania

2. Jeżeli

$$W(x)=x^2-(4b+3)x+3b^2+3b$$

$$x=2 \text{ dla } W(2)=0 \quad \text{tzn.}\quad 3b^2-5b-2=0$$

$$b_1=-\frac{1}{3},\ b_2=2$$

$$\text{dla}\quad b=-\frac{1}{3}\quad x=-\frac{1}{3}$$

$$\text{dla}\quad b=2\qquad x=9$$

Odp. a) Równanie ma jedno rozwiązanie dla

$$b\in\left\{-\frac{3}{2};\ \ -\frac{1}{3};\ \ 2\right\}$$

b) Równanie wymierne ma dwa różne rozwiązania ujemne wtedy, gdy równanie kwadratowe znajdujące się w liczniku ułamka ma dwa różne rozwiązania ujemne, a zatem:

1. $\Delta>0 \qquad \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\ \cup\ \left(-\frac{3}{2},\infty\right)$
2. $x_1+x_2<0$
3. $x_1,\ x_2>0$

ze wzorów Viete'a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

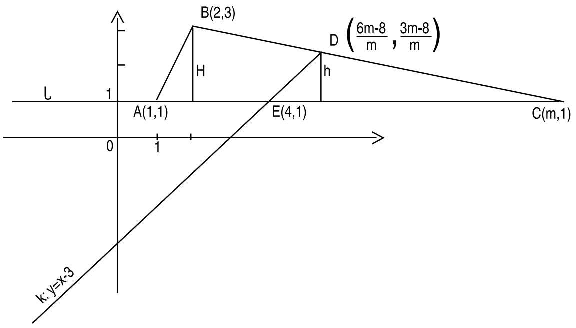
$$\begin{cases} 4b+3<0 & \Rightarrow\ b<-\frac{3}{4} \\ 3b^2+3b>0 & \Rightarrow\ b\in(-\infty,-1)\ \cup\ (0,\infty) \end{cases}$$

Wyznaczamy część wspólną

Odp. b)

$$b\in(-\infty,-\frac{3}{2})\ \cup\ (-\frac{3}{2},-1)$$

Zadanie 2



$$P_{\Delta ABC} = 2P_{\Delta EDC}$$

Punkt E należy do prostej k i do prostej l, zatem jego współrzędne wynoszą (4,1). Wyznaczamy równanie prostej BC:

$$y-3 = \frac{1-3}{m-2}(x-2)$$

po przekształceniu otrzymujemy prostą

$$y = \frac{-2}{m-2}x + \frac{3m-2}{m-2}$$

Punkt D należy do prostej k i prostej BC.

Wyznaczamy współrzędne punktu D z układu równań

$$\begin{cases} y = \frac{-2}{m-2}x + \frac{3m-2}{m-2} \\ y = x-3 \end{cases}$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$x = \frac{6m-8}{m},\quad y = \frac{3m-8}{m}$$

Zadanie będzie miało rozwiązanie dla $m>4$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot H$$

$$P_{\Delta EDC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CE}|\cdot h$$

$$H=2 \qquad |\overrightarrow{AC}| = m-1$$

$$h = \frac{2m-8}{m} \qquad |\overrightarrow{CE}| = m-4$$

a zatem

$$\frac{1}{2}(m-1)\cdot 2 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2m-8}{m}\cdot(m-4)$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie:

$$-m^2+15m-32=0$$

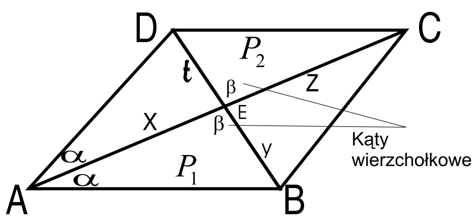
stąd $m_1 = \frac{15+\sqrt{97}}{2}$

$m_2 = \frac{15-\sqrt{97}}{2}$ ta wartość nie spełnia założenia.

Odp. Warunki zadania spełnione są dla:

$$m = \frac{15+\sqrt{97}}{2}$$

Zadanie 3



$$P_1 = \frac{1}{2}xy\sin\beta \qquad P_2 = \frac{1}{2}zt\sin\beta$$

$$P_1 = P_2 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}xy\sin\beta = \frac{1}{2}zt\sin\beta$$

$$xy = zt$$

$$\frac{x}{t} = \frac{z}{y}$$

$\Delta\, AED$ jest podobny do $\Delta\, CEB$ (boki proporcjonalne i taki sam kąt zawarty między tymi bokami), z tego wynika, że

$$\measuredangle DAE \equiv \measuredangle BCE$$

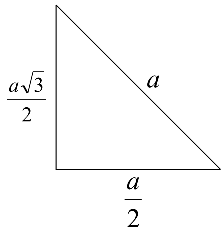
zatem $\Delta\, ACB$ jest równoramienny, co oznacza, że

$$|BC| = |AB| = 4$$

Odp. Długość odcinka BC równa się 4.

Zadanie 4

a) Z treści zadania wynika, że trójkąt ma kąty o miarach 30°, 60°, 90°, a zatem boki mają długości:



Obwód:

$$a+\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}=3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

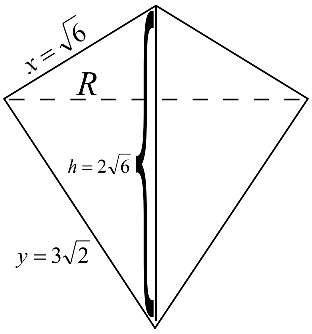
$$a(3+\sqrt{3})=6(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$a=2\sqrt{6}$$

dp. a) Boki trójkąta mają długości:

$$\sqrt{6};3\sqrt{2};\ 2\sqrt{6}$$

b) Obracając trójkąt dookoła przeciwprostokątnej, otrzymujemy dwa stożki o wspólnej podstawie, których suma wysokości jest równa długości przeciwprostokątnej.



Z własności trójkąta prostokątnego wynika $xy=hR$

$$R=\frac{xy}{h}=\frac{\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}\Pi R^2\cdot h$$

$$V=\frac{1}{3}\Pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 2\sqrt{6}$$

$$V=3\sqrt{6}\,\Pi$$

Zadanie 5

B_1 – zdarzenie polegające na wylosowaniu monety prawidłowej.

$$P(B_1)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

B_2 – zdarzenie polegające na wylosowaniu monety z dwoma orłami

$$\overline{\overline{A'_n}}=C^2_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(A'_n)=\frac{n(n+1)}{2n(2n+1)}=\frac{n+1}{4n+2}$$

$$P(A_n)=1-P(A')=\frac{3n+1}{4n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n+2}=\frac{3}{4}$$

$$P(B_2)=\frac{1}{5}$$

A – zdarzenie polegające na uzyskaniu 10 orłów w 10 rzutach

A/B_1 – zdarzenie polegające na uzyskaniu 10 orłów w 10 rzutach prawidłową monetą

$$P(A/B_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$$

A/B_2 – zdarzenie polegające na uzyskaniu 10 orłów w 10 rzutach monetą z dwoma orłami

$P(A/B_2)=1$ $\qquad$ $P(B_1)+P(B_2)=1$

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(A)=P(A/B_1)\cdot P(B_1)+P(A/B_2)\cdot P(B_2)$$

$$P(A)=\frac{257}{5\cdot 256}$$

B_2/A – zdarzenie polegające na wybraniu monety z dwoma orłami, pod warunkiem że otrzymamy 10 orłów w 10 rzutach. Korzystamy ze wzoru Bayesa

$$P(B_2/A)=\frac{P(A/B_2)\cdot P(B_2)}{P(A)}=\frac{256}{257}$$

Odp. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{256}{257}$

Zadanie 5*

Ω – kombinacje 2-elementowe ze zbioru *(2n+1)* elementowego

$$\overline{\overline{\Omega}} = C_{2n+1}^{2} = \frac{(2n+1)2n}{2} = n(2n+1)$$

$\overline{A'_n}$ – zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch liczb nieparzystych

$$\overline{\overline{A'_n}} = C_{n+1}^{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(A'_n) = \frac{n(n+1)}{2n(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}$$

$$P(A_n) = 1 - P(A') = \frac{3n+1}{4n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n+2} = \frac{3}{4}$$

Odp. $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ wynosi $\frac{3}{4}$