Miejsce na naklejkę z kodem szkoły

☐ dysleksja

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

Czas pracy 120 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1–11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
8. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.

Życzymy powodzenia!

2008

Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

Zadanie 1. (*5 pkt*)

Sprawdź, które z liczb: $a = \frac{4^{-6} \cdot 8^6}{2^4}$, $b = 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{2}{9}}$, $c = \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}+2}$ należą do zbioru rozwiązań nierówności: $|x-7| \leqslant 5$.

Zadanie 2. (*4 pkt*)
Wydrukowane zdjęcie ma wymiary 10 cm × 15 cm. Drugą odbitkę zdjęcia wydrukowano w tym samym formacie, ale tym razem z białą ramką równej szerokości wokół. W związku z tym powierzchnia samego zdjęcia zmniejszyła się o 37,44 cm^2. Oblicz szerokość ramki.

Zadanie 3. (*3 pkt*)

Przechodząc codziennie obok cukierni, Kuba rzuca monetą jednozłotową. Jeżeli wypadnie orzeł, wchodzi do cukierni i kupuje pączka, w przeciwnym wypadku idzie dalej. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przez kolejne 3 dni kupi w tej cukierni co najmniej jednego pączka.

Zadanie 4. (*3 pkt*)

Samochody A i B wjeżdżają na wzniesienie. Samochód A znajduje się na wysokości 378 m n.p.m., a samochód B – na wysokości 453 m n.p.m. Odległość między samochodami jest równa 850 m. Wyznacz miarę kąta (w stopniach), pod którym wznosi się szosa, przyjmując, że na tym odcinku biegnie ona po linii prostej. Wykonaj rysunek pomocniczy.

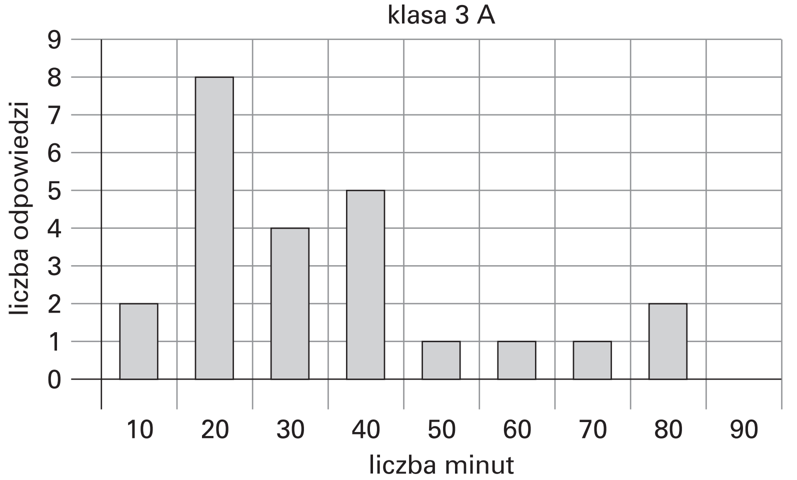
Zadanie 5. (*5 pkt*)

Pani Aleksandra i pani Barbara miały po 6000 zł oszczędności. Pani Aleksandra wpłaciła swoje pieniądze na trzyletnią lokatę oprocentowaną w wysokości 5% w stosunku rocznym (bank co roku dopisywał odsetki do kwoty znajdującej się na lokacie). Pani Barbara kupiła 150 akcji spółki Alfa po 20 zł i 100 akcji spółki Omega po 30 zł. Po trzech latach akcje spółki Alfa podrożały o 45%, a akcje spółki Omega staniały o 10%. Pani Barbara sprzedała wówczas wszystkie akcje. Która z pań lepiej ulokowała swoje oszczędności?

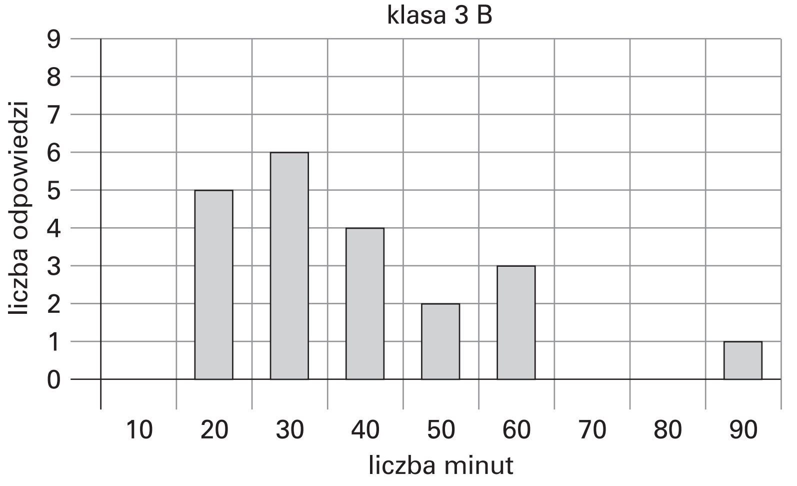
Zadanie 6. (*6 pkt*)

W klasach 3A i 3B przeprowadzono ankietę. Pytanie brzmiało: *Ile minut zajmuje ci codzienna droga do szkoły?*.

a) Na podstawie diagramu oblicz odchylenie standardowe liczby minut w klasie 3A.



b) Drugi diagram, sporządzony na podstawie odpowiedzi uczniów z kl. 3B, jest niedokończony. Brakuje na nim słupka dla odpowiedzi „10 minut”. Dorysuj ten słupek, wiedząc, że średni czas dojazdu uczniów dla obu klas jest taki sam.



Zadanie 7. (*3 pkt*)

Dane są punkty $A = (7, 29)$, $B = (12, -26)$, $C = (-6, -23)$, $D = (-16, 30)$. Wykonując odpowiednie rachunki, sprawdź, do której ćwiartki układu współrzędnych należy punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$.

Zadanie 8. (*3 pkt*)

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, wiedząc, że jej zbiorem wartości jest przedział $(-\infty; 6\rangle$ oraz że funkcja przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x \in (0; 8)$.

Zadanie 9. (*5 pkt*)
Pole rombu niebędącego kwadratem jest równe 2 cm^2. Naszkicuj wykres funkcji, która opisuje długość krótszej przekątnej tego rombu w zależności od długości dłuższej przekątnej.

Zadanie 10. (*7 pkt*)

Z kawałka lustra w kształcie trójkąta równobocznego o boku 20 cm wycięto trzy jednakowe okrągłe lusterka w ten sposób, że były one styczne do siebie i jednocześnie każde z nich było styczne do boków trójkąta. Oblicz, ile procent lustra wykorzystano na wykonanie tych lusterek. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1%. Przyjmij $\pi = 3{,}14$.

Zadanie 11. (*6 pkt*)

Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez prostokątny, którego podstawy mają długości 3 i 8. Krótsza przekątna graniastosłupa jest równa 12 i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 30°. Oblicz objętość tego graniastosłupa. Sporządź rysunek pomocniczy i zaznacz na nim podane w zadaniu wielkości.

BRUDNOPIS

Nr czynności	Opis czynności	Pkt
1.1	Obliczenie a: $a = 4$	1
1.2	Obliczenie b: $b = 1$	1
1.3	Obliczenie c: $c = 2$	1
1.4	Rozwiązanie nierówności: $x \in \langle 2; 12 \rangle$ lub podstawienie liczb a, b, c w miejsce x	1
1.5	Zapisanie odpowiedzi: do zbioru rozwiązań nierówności należą liczby a i c	1
2.1	Sporządzenie rysunku lub wprowadzenie oznaczeń np. x – szerokość ramki w cm i $x \in (0; 5)$	1
2.2	Ułożenie równania pozwalającego obliczyć x: $(10 - 2x)(15 - 2x) = 150 - 37{,}44$	1
2.3	Przekształcenie równania do postaci: $4x^2 - 50x + 37{,}44 = 0$	1
2.4	Rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunków zadania i podanie odpowiedzi: szerokość ramki jest równa 0,8 cm	1
3.1	Wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych: 8	1
3.2	Wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających: 7	1
3.3	Obliczenie szukanego prawdopodobieństwa i podanie odpowiedzi: $\frac{7}{8}$	1
4.1	Wykonanie rysunku i zaznaczenie na nim odpowiedniego trójkąta prostokątnego lub wprowadzenie oznaczeń	1
4.2	Zapisanie zależności $\sin\alpha = \frac{75}{850}$, α – kąt wzniesienia	1
4.3	Wyznaczenie kąta wzniesienia i podanie odpowiedzi: $\alpha = 5°$	1
5.1	Zastosowanie wzoru na procent składany do obliczenia stanu konta pani Aleksandry	1
5.2	Obliczenie stanu konta pani Aleksandry po trzech latach: 6945,75 zł	1
5.3	Obliczenie ceny akcji spółek po trzech latach: 29 zł i 27 zł	1
5.4	Obliczenie stanu konta pani Barbary po trzech latach: 7050 zł	1
5.5	Porównanie wyników i zapisanie odpowiedzi	1
6.1	Obliczenie średniej liczby minut w klasie 3A: 35	1
6.2	Obliczenie odchylenia standardowego i podanie odpowiedzi: $\sqrt{\frac{1175}{3}} \approx 19{,}8$	2
6.3	Ułożenie równania pozwalającego obliczyć liczbę pozostałych odpowiedzi w kl. 3B: $\frac{10x + 810}{x + 21} = 35$	1
6.4	Rozwiązanie równania: $x = 3$	1
6.5	Uzupełnienie diagramu	1
7.1	Wyznaczenie równania przekątnej AC: $y = 4x + 1$	1
7.2	Wyznaczenie równania przekątnej BD: $y = -2x - 2$	1
7.3	Wyznaczenie współrzędnych punktu przecięcia przekątnych: $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ i sformułowanie odpowiedzi	1

Nr czynności	Opis czynności	PKT
8.1	Wykorzystanie faktu, że miejscami zerowymi funkcji są liczby 0 i 8	1
8.2	Wykorzystanie faktu, że punkt (4, 6) jest wierzchołkiem paraboli	1
8.3	Podstawienie współrzędnych punktu (4, 6) do wzoru funkcji $f(x) = ax(x-8)$, wyznaczenie $a = -\frac{3}{8}$ i zapisanie odpowiedzi	1
9.1	Wykonanie rysunku lub wprowadzenie oznaczeń, np. y – krótsza przekątna rombu; x – dłuższa przekątna rombu	1
9.2	Zapisanie wzoru funkcji: $y = \frac{4}{x}$	1
9.3	Określenie dziedziny funkcji: $D = (2; \infty)$	1
9.4	Naszkicowanie wykresu funkcji z uwzględnieniem dziedziny	2
10.1	Sporządzenie rysunku lub wprowadzenie oznaczeń, np.: r – promień lusterka	1
10.2	Wykorzystanie faktu, że środki lusterek tworzą trójkąt równoboczny o boku $2r$	1
10.3	Zapisanie równania pozwalającego obliczyć r, np.: $r + r\sqrt{3} + 2r = 10\sqrt{3}$	1
10.4	Wyznaczenie r: $5\left(\sqrt{3}-1\right)$	1
10.5	Obliczenie pola powierzchni lusterek: 126,2 cm^2	1
10.6	Obliczenie pola trójkąta: $100\sqrt{3}$ cm^2	1
10.7	Podanie odpowiedzi z odpowiednim zaokrągleniem: 73%	1
11.1	Sporządzenie rysunku	1
11.2	Wyznaczenie długości krótszej przekątnej podstawy: $6\sqrt{3}$	1
11.3	Wyznaczenie długości wysokości podstawy: $3\sqrt{11}$	1
11.4	Wyznaczenie długości wysokości graniastosłupa: 6	1
11.5	Wyznaczenie pola podstawy: $\frac{33\sqrt{11}}{2}$	1
11.6	Wyznaczenie objętości graniastosłupa: $99\sqrt{11}$ i zapisanie odpowiedzi	1

Miejsce na naklejkę z kodem szkoły

☐ dysleksja

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 180 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1–11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
8. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.

Życzymy powodzenia!

2008

Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

Zadanie 1. (*3 pkt*)

Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru m, dla których reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + mx + 5$ przez $x + 2$ jest mniejsza od -2, zaś reszta z dzielenia tego samego wielomianu przez $x - 3$ jest mniejsza od 3.

Zadanie 2. (*3 pkt*)

W sklepie jest 5 kg jabłek w cenie 2,50 zł/kg, 25 kg jabłek w cenie 3,20 zł/kg i 18 kg jabłek w cenie 3,75 zł/kg. Do sklepu przywieziono jeszcze dodatkowo 4 skrzynki jabłek w cenie 2,50 zł/kg i wtedy średnia cena jabłek zmniejszyła się do 3 zł/kg. Ile średnio kg jabłek było w każdej z tych skrzynek?

Zadanie 3. (*4 pkt*)

Funkcja f przyporządkowuje każdej dodatniej liczbie x wykładnik potęgi, do której trzeba podnieść liczbę $\frac{1}{2}$, aby otrzymać połowę liczby x.

a) Podaj wzór funkcji f.

b) Naszkicuj wykres funkcji f dla $x \in \left(\frac{1}{2}; 8\right)$.

Zadanie 4. (*3 pkt*)

W trójkącie równoramiennym podstawa AB ma długość 18, a ramiona AC i BC mają długość 15. Oblicz długość środkowej AE tego trójkąta.

Zadanie 5. (*6 pkt*)

W zbiorze $Z = \{-2n + 1, -2n + 3, ..., -3, -1, 0, 1, 3, ..., 2n - 3, 2n - 1\}$, gdzie n jest dodatnią liczbą naturalną większą od 4, zmieniono znaki na przeciwne trzem losowo wybranym liczbom. Wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że suma wszystkich liczb w zbiorze nie uległa zmianie wynosi $\frac{1}{161}$. Wyznacz n.

Zadanie 6. (*4 pkt*)

a) Wyraź pole koła opisanego na trójkącie równoramiennym jako funkcję długości b jego ramienia i kąta α między podstawą a ramieniem.

b) Wykaż, że pole koła opisanego na trójkącie równoramiennym jest większe od pola koła, którego średnicą jest ramię tego trójkąta.

Zadanie 7. (*7 pkt*)

Wykres funkcji liniowej $y = mx + b$ dla $m \neq 0$ przechodzi przez punkt $P = (2, -1)$ i przecina oś x w punkcie B. Wyraź odległość punktu B od początku układu współrzędnych jako funkcję parametru m. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji i naszkicuj jej wykres.

Zadanie 8. (*4 pkt*)
Dane są dwa ciągi arytmetyczne. W ciągu (a_n) wyraz pierwszy wynosi 38, a różnica –2. W ciągu (b_n) wyraz pierwszy wynosi –49, a różnica jest równa 3. Niech S_n' oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n), a S_n'' oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (b_n). Funkcja określona jest wzorem: $f(n) = S_n' + S_n''$. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f.

Zadanie 9. (*3 pkt*)
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} 2x \cdot \cos 2x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x$ w przedziale $(0; 2\pi\rangle$.

Zadanie 10. (*7 pkt*)

Napisz równanie okręgu stycznego do osi y w punkcie $A = (0, 2)$ i przechodzącego przez punkt $P = (4, 6)$. Wyznacz na okręgu takie punkty B i C, aby trójkąt ABC był równoboczny.

Zadanie 11. (*6 pkt*)

Podstawą ostrosłupa jest romb o przekątnych 2 i 4. Wysokość ostrosłupa wynosi 3, a jej spodkiem jest środek symetrii podstawy. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

BRUDNOPIS

BRUDNOPIS

Nr czynności	Opis czynności	Pkt
1.1	Zapisanie warunków: $W(-2) < -2$ i $W(3) > 3$	1
1.2	Rozwiązanie obu nierówności: $m > -\frac{21}{2}$ i $m < -\frac{29}{3}$	1
1.3	Zapisanie odpowiedzi: $m = -10$	1
2.1	Wprowadzenie oznaczeń, np.: x – średnia liczba kg jabłek w każdej skrzynce	1
2.2	Zapisanie równania: $\frac{(5+4x)\cdot 2{,}5 + 25\cdot 3{,}20 + 18\cdot 3{,}75}{5+4x+25+18} = 3$	1
2.3	Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: 8 kg	1
3.1	Zapisanie wzoru funkcji f: $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right)$	1
3.2	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$	1
3.3	Naszkicowanie wykresu funkcji $y = \log_{\frac{1}{2}} x$	1
3.4	Naszkicowanie wykresu funkcji f	1
4.1	Narysowanie równoległoboku, w którym jedną z przekątnych jest BC, a druga jest równa $2AE$ i wprowadzenie oznaczeń wierzchołków, np.: $ABMC$; poprowadzenie wysokości z wierzchołka M na prostą AB oraz wprowadzenie jej oznaczenia, np.: MP	1
4.2	Wyznaczenie wysokości h poprowadzonej z wierzchołka C w trójkącie ABC oraz zauważenie, że $\lvert MP\rvert = h = 12$	1
4.3	Wyznaczenie $\lvert AP\rvert = 27$, $\lvert AM\rvert = 3\sqrt{97}$ i zapisanie odpowiedzi $\lvert AE\rvert = \frac{3}{2}\sqrt{97}$	1
	II sposób	
4.1	Wykonanie rysunku lub wprowadzenie precyzyjnych oznaczeń, np.: F – środek boku AB, S – punkt przecięcia środkowych trójkąta	1
4.2	Wyznaczenie $\lvert FS\rvert = \frac{1}{3}\lvert CF\rvert = 4$	1
4.3	Wyznaczenie $\lvert AE\rvert = \frac{3}{2}\lvert AS\rvert$ i zapisanie odpowiedzi: $\lvert AE\rvert = \frac{3}{2}\sqrt{97}$	1
	III sposób	
	Zamiast czynności 4.2 i 4.3 (w sposobie II) zdający może obliczyć cos ($\sphericalangle ABC$) i wyznaczyć $\lvert AE\rvert$ z twierdzenia cosinusów.	
5.1	Wyznaczenie liczby elementów zbioru Z: $2n + 1$	1
5.2	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\frac{(2n+1)\,n(2n-1)}{3}$	1
5.3	Zapisanie wniosku, że wybrano liczbę 0 oraz dwie liczby przeciwne	1
5.4	Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających: n	1
5.5	Zapisanie równania $\frac{3}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{161}$	1
5.6	Wyznaczenie $n = 11$	1
6.1	Zapisanie promienia R okręgu opisanego na trójkącie: $2R = \frac{b}{\sin\alpha}$	1
6.2	Obliczenie pola koła: $P = \frac{\pi b^2}{4\sin^2\alpha}$	1
6.3	Zapisanie, że stosunek pola koła opisanego do pola koła o średnicy b wynosi: $\frac{1}{\sin^2\alpha}$	1
6.4	Uzasadnienie, że $\frac{1}{\sin^2\alpha} > 1$	1

Nr czynności	Opis czynności	Pkt
7.1	Wykorzystanie warunku, że wykres funkcji $y = mx + b$ przechodzi przez punkt $P = (2, -1)$ i zapisanie równania prostej: $y = mx - 2m - 1$	1
7.2	Wyznaczenie odciętej punktu B: $\frac{2m+1}{m}$	1
7.3	Obliczenie odległości punktu B od początku układu współrzędnych: $\left\lvert\frac{2m+1}{m}\right\rvert$	1
7.4	Zapisanie wzoru funkcji $f(m)$ w postaci: $f(m)=\left\lvert\frac{1}{m}+2\right\rvert$	1
7.5	Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji: $m=-\frac{1}{2}$	1
7.6	Naszkicowanie wykresu funkcji: $y = \frac{1}{m} + 2$	1
7.7	Naszkicowanie wykresu funkcji $f(m)$	1
8.1	Wyznaczenie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n): $S_n' = 39n - n^2$	1
8.2	Wyznaczenie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu (b_n): $S_n'' = -\frac{101}{2}n + \frac{3}{2}n$	1
8.3	Zapisanie wzoru funkcji f: $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{23}{2}n$ i obliczenie $p = 11\frac{1}{2}$	1
8.4	Obliczenie $f(11) = -66$ i $f(12) = -66$ i sformułowanie odpowiedzi	1
9.1	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $\langle 0; 2\pi\rangle - \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$	1
9.2	Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $f(x) = \sin 2x - 2$	1
9.3	Naszkicowanie wykresu funkcji z uwzględnieniem dziedziny	1
10.1	Zapisanie równania okręgu w postaci: $(x - r)^2 + (y - 2)^2 = r^2$	1
10.2	Podstawienie do równania okręgu współrzędnych punktu (4, 6)	1
10.3	Wyznaczenie promienia okręgu i zapisanie równania okręgu: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$	1
10.4	Uzasadnienie tego, że bok BC jest równoległy do osi y	1
10.5	Zauważenie, że bok BC zawiera się w prostej $x = 6$ (np. korzystając z faktu, że środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest punktem przecięcia środkowych tego trójkąta)	1
10.6	Zapisanie i rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x=6 \\ (x-4)^2+(y-2)^2=16 \end{cases}$	1
10.7	Zapisanie współrzędnych punktów: $B = (6,\ 2 - 2\sqrt{3})$, $C = (6,\ 2 + 2\sqrt{3})$	1
11.1	Wykonanie rysunku lub wprowadzenie dokładnych oznaczeń	1
11.2	Obliczenie pola powierzchni podstawy ostrosłupa: 4	1
11.3	Obliczenie długości krawędzi podstawy: $\sqrt{5}$	1
11.4	Obliczenie promienia okręgu wpisanego w podstawę: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$	1
11.5	Obliczenie wysokości ściany bocznej: $\frac{7\sqrt{5}}{5}$	1
11.6	Obliczenie pola powierzchni całkowitej ostrosłupa: 18	1