GazetaEdukacja.pl

gazeta EDUKACJA

ŚRODA 23 WRZEŚNIA 2009

DODATEK DO „GAZETY WYBORCZEJ” REDAGUJE: AGNIESZKA ZAWISTOWSKA

Matura 2010 matematyka

Sprawdź, czy zdasz!

Poziom podstawowy

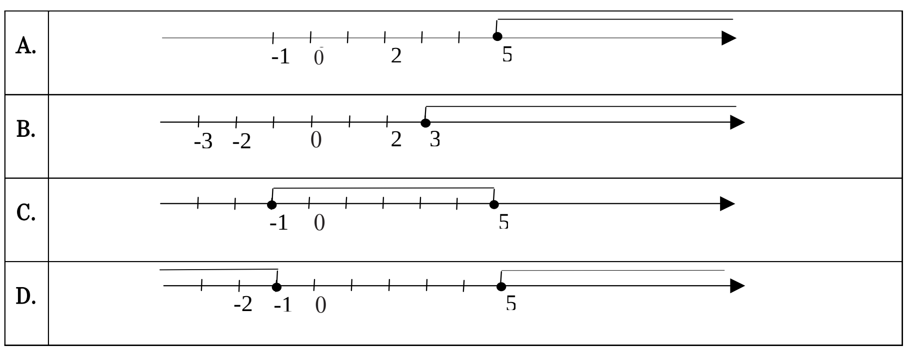
Maturzysto! W maju napiszesz obowiązkową maturę z matematyki. Dziś drukujemy próbny test wraz z odpowiedziami przygotowany przez ekspertów „Gazety”. Sprawdź, czego się jeszcze musisz nauczyć

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 26. wybierz i zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 punkt)

Zbiór rozwiązań nierówności $|2-x|\geq 3$ zaznaczono na osi liczbowej. Wskaż właściwy rysunek.



Zadanie 2. (1 punkt)

8% liczby x jest równe 40. Wynika stąd, że

A. $x=32$ B. $x=320$ C. $x=500$ D. $x=5000$

Zadanie 3. (1 punkt)

Liczba $11^{\frac{7}{3}} : \sqrt[3]{11}$ jest równa

A. 11^2 B. $11^{\frac{7}{9}}$ C. $11^{\frac{9}{7}}$ D. $11^{\frac{4}{3}}$

Zadanie 4. (1 punkt)

Liczba $5\sqrt{12}$ jest równa

A. $\sqrt{17}$ B. $\sqrt{60}$ C. $\sqrt{250}$ D. $\sqrt{300}$

Zadanie 5. (1 punkt)

Jeżeli $x = 2\log 6 - \log 3$ to

A. $x = \log 12$ B. $x = 2\log 3$ C. $x = 2\log 2$ D. $x = \log 18$

Zadanie 6. (1 punkt)

Dziedziną wyrażenia $\frac{x^2-4}{x-1}$ jest suma przedziałów

A. $(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ B. $(-\infty;1)\cup(2;\infty)$ C. $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ D. $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$

Zadanie 7. (1 punkt)

Rozwiązaniem nierówności $\frac{x-4}{2} > x-1$ jest przedział

A. $(-\infty;-2)$ B. $(-\infty;2)$ C. $(-2;\infty)$ D. $(2;\infty)$

Zadanie 8. (1 punkt)

Wskaż zbiór rozwiązań nierówności $x^2 > 3x$.

A. $(3;\infty)$ B. $(0;\infty)$ C. $(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$ D. $(-\infty;0)\cup(3;\infty)$

Zadanie 9. (1 punkt)

Wskaż liczbę rozwiązań równania $\frac{x-8}{x^3+64}=0$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Zadanie 10. (1 punkt)

Wyrażenie $6x^2-7$ jest równe

A. $(3x-1)(2x+7)$

B. $(3x-7)(2x+1)$

C. $(x\sqrt{6}-\sqrt{7})(x\sqrt{6}+\sqrt{7})$

D. $(x\sqrt{6}-\sqrt{7})(x\sqrt{6}+1)$

Zadanie 11. (1 punkt)

Liczba $|2-7|-|-1-5|$ jest równa

A. –2 B. –1 C. 1 D. 2

Zadanie 12. (1 punkt)

Liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=(a-3)x+4$. Wynika stąd, że

A. $a=1$ B. $a=2$

C. $a=3$ D. $a=4$

Zadanie 13. (1 punkt)

Funkcja f jest określona wzorem

$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{dla } x\leq -2 \\ 1-x^2 & \text{dla } x>-2 \end{cases}$. Ile miejsc zerowych ma ta funkcja?

A. 0 B. 1

C. 2 D. 3

Dokończenie – s. 2 ►►►

▸▸▸ Dokończenie ze s. 1

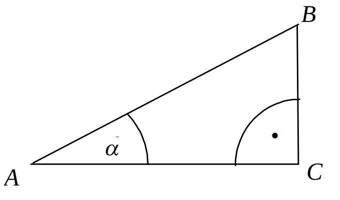
Zadanie 14. (1 punkt)
Prosta, która jest osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej $f(x)=x^2+2x-3$, ma równanie
A. $x=-2$ B. $x=-1$ C. $x=1$ D. $x=2$

Zadanie 15. (1 punkt)
Wykres funkcji kwadratowej $f(x)=2(x-3)^2+1$ nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu
A. $y=0$ B. $y=1$ C. $y=2$ D. $y=3$

Zadanie 16. (1 punkt)
Ciąg $(2, x+3, 8)$ jest arytmetyczny. Wynika stąd, że
A. $x<1$ B. $x=1$ C. $x=2$ D. $x>2$

Zadanie 17. (1 punkt)
Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy 8, a czwarty wyraz tego ciągu jest równy (-4). Piąty wyraz tego ciągu jest równy
A. -16 B. -2 C. 2 D. 16

Zadanie 18. (1 punkt)
Dane są długości boków $|AC|=6$ i $|BC|=4$ trójkąta prostokątnego ABC o kącie ostrym α (zobacz rysunek).



Wtedy
A. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$ C. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3\sqrt{13}}{13}$
B. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$ D. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

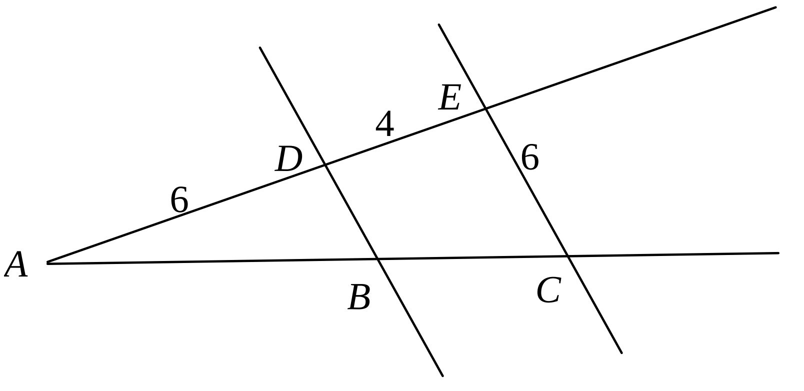
Zadanie 19. (1 punkt)
Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}$. Wówczas
A. $\alpha<30°$ B. $\alpha=30°$ C. $\alpha=45°$ D. $\alpha>45°$

Zadanie 20. (1 punkt)
Różnica miar dwóch sąsiednich kątów rombu jest równa 20°. Kąt ostry rombu ma miarę
A. 85° B. 80° C. 75° D. 70°

Zadanie 21. (1 punkt)
Promień koła wpisanego w trójkąt równoboczny jest równy 2. Wynika stąd, że obwód tego trójkąta jest równy
A. 24 B. 18 C. $12\sqrt{3}$ D. $18\sqrt{3}$

Zadanie 22. (1 punkt)
Bok rombu ma długość 2, a kąt ostry ma miarę 45°. Pole koła wpisanego w ten romb jest równe
A. 4π B. 2π C. π D. $\frac{\pi}{2}$

Zadanie 23. (1 punkt)
Proste BD i CE są równoległe. Długości odcinków AD, DE i CE są podane na rysunku.



Długość odcinka BD jest równa
A. 2 B. 2,4 C. 3,6 D. 4

Zadanie 24. (1 punkt)
Wskaż równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=-2x+3$.
A. $y=\frac{1}{2}x-3$ B. $y=-\frac{1}{2}x+3$ C. $y=2x-3$ D. $y=-2x+3$

Zadanie 25. (1 punkt)
Punkty $A=(-2,1)$, $C=(2,3)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe
A. 20 B. 10 C. 8 D. 4

Zadanie 26. (1 punkt)
Wskaż równanie okręgu o środku $S=(-2,3)$, który przechodzi przez punkt $A=(2,3)$.
A. $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ C. $(x+2)^2+(y-3)^2=4$
B. $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ D. $(x+2)^2+(y-3)^2=16$

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 27. (2 punkty)
Rozwiąż nierówność $x^2 + 5x + 6 \geq 0$.

Zadanie 28. (2 punkty)
Rozwiąż równanie $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$.

Zadanie 29. (2 punkty)
Liczby 1, $3 - 2x$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, trzecim i czwartym wyrazem ciągu geometrycznego. Oblicz x.

Zadanie 30. (2 punkty)
Oblicz największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ w przedziale $\langle 0;\ 2 \rangle$.

Zadanie 31. (2 punkty)
Punkty $A = (0,0)$, $B = (1,3)$, $C = (4,6)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną BD tego równoległoboku.

Zadanie 32. (2 punkty)
Wyrażenie $\frac{x}{x+2} - \frac{3}{x-2}$ zapisz w postaci ilorazu dwóch wielomianów.

Zadanie 33. (4 punkty)
Okrąg, którego środek leży na osi Ox, jest styczny do prostej o równaniu $x - y = 0$ w punkcie $A = (3,3)$. Wyznacz równanie tego okręgu.

Zadanie 34. (4 punkty)
Bok rombu ma długość 17. Długości przekątnych różnią się o 14. Oblicz pole tego rombu.

Zadanie 35. (4 punkty)
W trójkącie prostokątnym tangens jednego z kątów ostrych jest równy 3. Oblicz stosunek promienia koła opisanego na tym trójkącie do promienia koła wpisanego w ten trójkąt.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
OdpowiedŸ	D	C	A	D	A	C	A	D	A	C	B	A	D	B	A	C	C	B	D	B	C	D	C	A	B	D

WSKAZÓWKI DO ROZWIĄZYWANIA NIEKTÓRYCH ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Zadanie 1.

Zauważ, że $|2 - x| = |x - 2|$. Bezpośrednio z własności: $|x - a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r$ lub $x \geq a + r$ umieszczonej w *Zestawie wybranych wzorów matematycznych*, którego można używać w czasie egzaminu maturalnego, wynika, że rozwiązaniem nierówności jest suma przedziałów liczbowych. Tylko na rysunku oznaczonym literą D mamy taką sytuację i to jest prawidłowa odpowiedź.

Zadanie 3.
Korzystamy z prawa działań na potęgach: $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$ i zapisujemy dane wyrażenie w postaci $11^{\frac{7}{3}} : \sqrt[3]{11} = 11^{\frac{7}{3}} : 11^{\frac{1}{3}}$, a następnie ze wzoru $a^n : a^m = a^{n-m}$, w wyniku czego otrzymujemy odpowiedź $11^{\frac{6}{3}} = 11^2$.

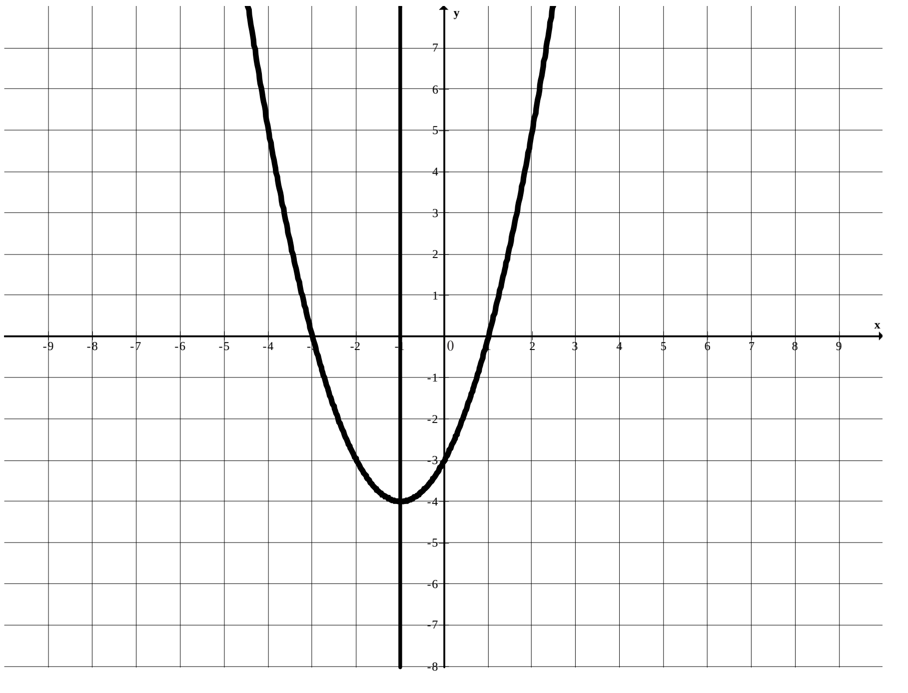
Zadanie 5.
Stosując kolejno prawa działań na logarytmach: $r \cdot \log_a x = \log_a x^r$ oraz $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ (*Zestaw wybranych wzorów matematycznych*), otrzymujemy:
$2\log 6 - \log 3 = \log 6^2 - \log 3 = \log \frac{6^2}{3} = \log 12$.

Zadanie 8.
Zapisujemy nierówność w postaci iloczynowej $x(x-3) > 0$. Z tej postaci możemy odczytać, że miejscami zerowymi lewej strony nierówności są liczby $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, więc prawidłową odpowiedzią jest D.

Zadanie 9.
Wyrażenie przyjmuje wartość zero, gdy licznik jest równy zero i mianownik różny od zera, czyli gdy $x - 8 = 0$, czyli dla $x = 8$.

Zadanie 10.
Korzystamy ze wzoru $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Wyrażenie $6x^2 - 7$ można przedstawić w następującej postaci: $6x^2 - 7 = \left(x\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2$, a następnie zgodnie z zacytowanym wcześniej wzorem zapisać podaną różnicę w postaci iloczynu: $6x^2 - 7 = \left(x\sqrt{6} - \sqrt{7}\right)\left(x\sqrt{6} + \sqrt{7}\right)$.

Zadanie 14.
Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma równanie $x = \frac{-b}{2a}$.



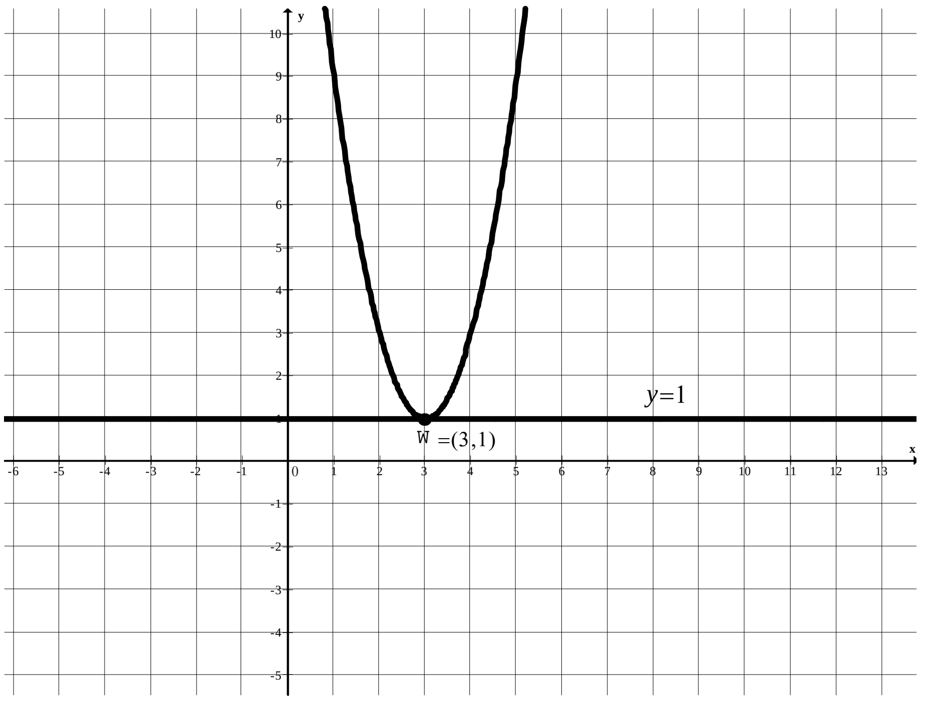
Dla danej paraboli jest to prosta o równaniu $x = -1$.

Dokończenie – s. 4 ►►►

▸▸▸ Dokończenie ze s. 3

Zadanie 15.

Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = a(x-p)^2 + q$ ma współrzędne (p, q). Prosta równoległa do osi Ox o równaniu $y = q$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą, niezależnie od a oraz p.



Ramiona paraboli danej w zadaniu są skierowane do góry, więc proste równoległe do osi Ox o równaniu $y = d$, gdzie $d<1$ nie mają z nią punktów wspólnych. Ten warunek spełnia prosta $y = 0$. Proste $y = 2$ oraz $y = 3$ mają dwa punkty wspólne z parabolą.

Zadanie 16.

W danym ciągu $a_1 = 2$ natomiast $a_3 = 8$, stąd $2r = 6$ i $r = 3$. Drugi wyraz ciągu jest równy 5, stąd wynika, że $x + 3 = 5$, zatem $x = 2$.

Zadanie 17.

Iloraz q danego ciągu arytmetycznego jest równy $q = \frac{a_4}{a_3} = -\frac{1}{2}$. Piąty wyraz tego ciągu będzie zatem równy $a_5 = a_4 \cdot q = (-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$.

Zadanie 20.

Korzystamy z następującej własności rombu: suma miar sąsiednich kątów w rombie jest równa 180^o. Oznaczmy miarę kąta ostrego symbolem α, wtedy drugi kąt ma miarę $\alpha + 20^o$ (bo różnica miar tych kątów jest równa 20^o). Mamy więc równanie $\alpha + \alpha + 20° = 180°$, stąd $2\alpha = 160°$, i $\alpha = 80°$.

Zadanie 23.

Korzystamy z twierdzenia Talesa lub z podobieństwa trójkątów ABD i ACE i układamy proporcję: $\frac{6}{|BD|} = \frac{6+4}{6}$. Odpowiedzią prawidłową jest więc C.

ODPOWIEDZI I SZKIC ROZWIĄZAŃ ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 27.

$x^2 + 5x + 6 \geq 0$

$\Delta = 1,\ x_1 = -3,\ x_2 = -2$

$(x+3)(x+2) \geq 0$

Odpowiedź: $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle -2; \infty)$

Zadanie 28.

$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$

$x^2(x-2) - 3(x-2) = 0$

$(x-2)(x^2-3) = 0$

$(x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$

Odpowiedź: $x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = 2$

Zadanie 29.

Z faktu, że w ciągu geometrycznym (a_n) mamy $a_1 = 1$ i $a_4 = 8$, wynika, że $q = 2$ oraz $a_3 = 4$. Stąd $3 - 2x = 4$ i $x = -\frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $x = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 30.

Funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ przyjmuje wartość największą dla $x = 1, 1 \in \langle 0;\ 2\rangle$, stąd wartością największą funkcji f w podanym przedziale jest $f(1) = -2$.

Odpowiedź: $f(1) = -2$.

Zadanie 31.

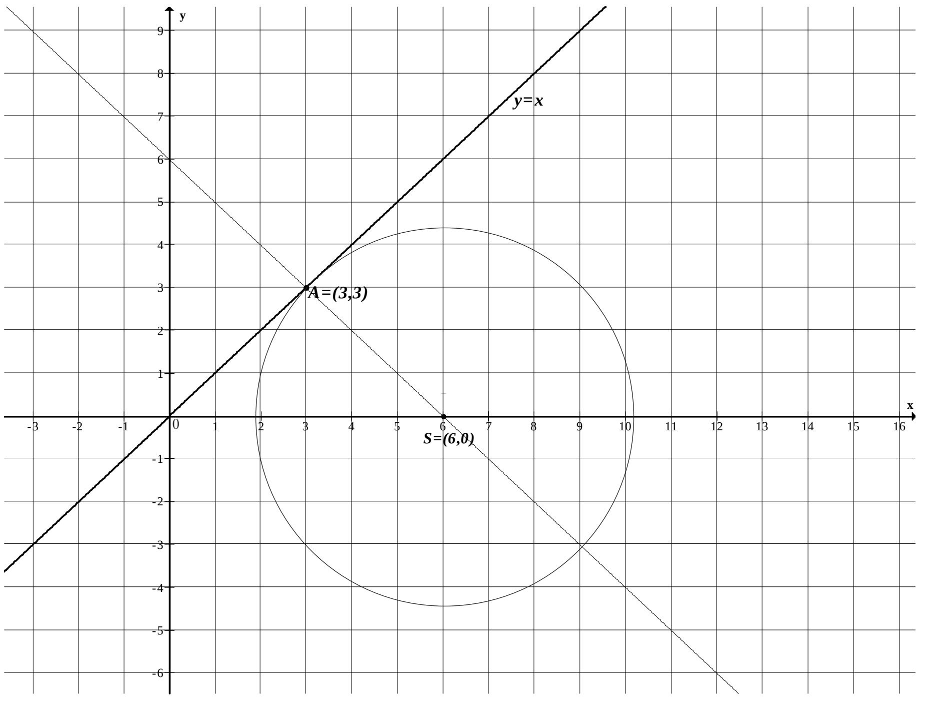
E - punkt wspólny przekątnych tego równoległoboku ma współrzędne $E = (2,3)$. Prosta zawierająca przekątną BD ma równanie $y = 3$.

Odpowiedź: $y = 3$.

Zadanie 32.

$$\frac{x}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{x(x-2) - 3(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 - 2x - 3x - 6}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 4}$$

Zadanie 33.

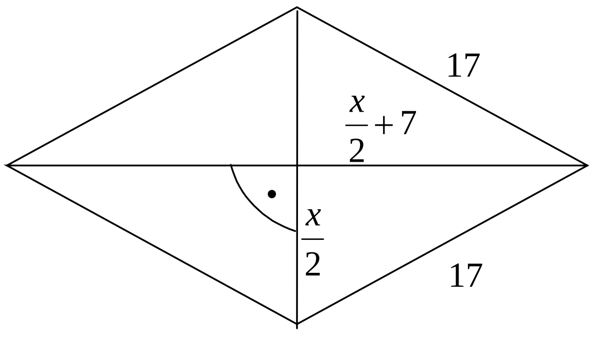


Z faktu, że okrąg jest styczny do prostej o równaniu $y = x$ w punkcie $A = (3,3)$, wynika, że środek tego okręgu leży na prostej prostopadłej do tej prostej przechodzącej przez punkt A. Równanie prostopadłej do prostej o równaniu $y = x$ i przechodzącej przez punkt A jest postaci $y = -x + 6$, stąd $S = (6,0)$. Promień r tego okręgu jest równy $r = |AS| = \sqrt{18}$.

Równanie okręgu jest postaci $(x-6)^2 + y^2 = 18$.

Zadanie 34.

Przyjmujemy oznaczenie: x - długość krótszej przekątnej rombu.



Długość dłuższej przekątnej to $x + 14$, a pole P rombu to $\frac{1}{2}x(x+14)$.

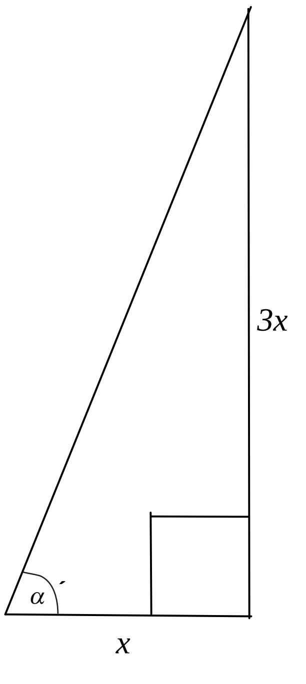
W rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym i punkt przecięcia jest środkiem każdej z nich.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + 7\right)^2 = 17^2$ i $x > 0$

stąd $x = 16$ i pole P rombu jest równe 240.

Zadanie 35.



Oznaczmy długość krótszej przyprostokątnej przez x, wtedy dłuższa przyprostokątna ma długość $3x$, a przeciwprostokątna ma długość $x\sqrt{10}$. Promień R okręgu opisanego na trójkącie ma długość $R = \frac{x\sqrt{10}}{2}$ (połowa długości przeciwprostokątnej), zaś promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość

$r = \frac{x + 3x - x\sqrt{10}}{2} = \frac{4x - x\sqrt{10}}{2}$ (z własności trójkąta prostokątnego).

Stosunek długości promieni jest równy

$\frac{R}{r} = \frac{x\sqrt{10}}{4x - x\sqrt{10}} = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{3}$.